Weinmeister (P. F. W.)

Diss. Marburg

1879.

UEBER DIE DREHUNG EINES HOMOGENEN, RECHTWINKELIG-PARALLELEPIPEDISCHEN STABES UM EINE VERTICALE AXE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI HOCHLÖBLICHER

PHILOSOPHISCHER FACULTÄT ZU MARBURG

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

VON

PAUL FRANZ WILHELM WEINMEISTER

AUS MARBURG,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM ZU ST. THOMAE IN LEIPZIG.

MARBURG,

1879.

SEINEM

HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN

DR. MED. ET PHIL. FRIEDRICH LUDWIG STEGMANN,

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK

AN

DER UNIVERSITÄT ZU MARBURG,

IN STETER DANKBARKEIT

DER VERFASSER.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0079

Ueber die Drehung eines homogenen, rechtwinkelig-parallelepipedischen Stabes um eine verticale Axe.

Hat man ein Punktsystem, für dessen Bewegung gewisse Beschränkungen vorhanden sind, die durch eine Anzahl von Gleichungen vorgestellt sein mögen, so lassen sich, falls die auf das System einwirkenden Kräfte nach Richtung und Intensität bekannt sind, falls man ferner den Anfangszustand des Systems kennt, für jeden Augenblick die Coordinaten der Punkte als Functionen der Zeit finden. Die dazu nöthigen Gleichungen kann man mit Hülfe des von d'Alembert gefundenen und nach ihm benannten Principes aufstellen. Das d'Alembert'sche Princip bietet den Vortheil, dass durch dasselbe die Bewegung des Systems auf das Gleichgewicht desselben zurückgeführt wird. Es lautet:*)

Die Bewegung eines beliebigen Systemes von Punkten, die irgendwie mit einander verbunden sind und unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte stehen, geschieht immer so, dass in jedem Augenblicke Gleichgewicht stattfindet zwischen den gegebenen Kräften und jenen Kräften, welche den wirksamen Kräften gleich und entgegengesetzt sind.

§ 1.

Gleichheit des Effectes eines sich um eine verticale Axe horizontal drehenden homogenen Stabes mit dem einer um dieselbe Axe kreisenden unendlich kleinen Kugel.

Das Punktsystem sei nun speciell zu einem homogenen, rechtwinkelig parallelepipedischen Stabe vereinigt, dessen Dimensionen gegeben und dessen Dichtigkeit bekannt ist; derselbe drehe sich horizontal um eine verticale Axe D, die im übrigen zunächst beliebig sei. Von der dabei statthabenden Reibung soll abgesehen werden. In einem bestimmten Moment seiner Drehung habe der Stab eine Winkelgeschwindigkeit w, wobei unter Winkelgeschwindigkeit der in der Zeiteinheit beschriebene Winkel verstanden sein soll. Dann lässt sich die Frage, wie gross

*) S. „Lehrbuch der analytischen Mechanik von Duhamel, deutsch herausgegeben von O. Schlömilch", Leipzig 1861, zweiter Band, S. 58. — Das Princip wurde von d'Alembert im Jahre 1742 veröffentlicht und im Jahr darauf in seinem „Traité de mécanique" bewiesen.

die in diesem Augenblick in irgend einem Punkt P der Längsaxe des Stabes vereinigt zu denkende Bewegungsquantität Q desselben ist, durch das d'Alembert'sche Princip leicht beantworten.

Der beliebige Punkt P habe von der Drehungsaxe D eine variabele Entfernung x. Dann ist also die im Abstand x von der Drehungsaxe wirkende Bewegungsquantität Q die einzige den Stab beherrschende Kraft, da ja die gesammte Bewegungsquantität in P vereinigt gedacht wurde; es lässt sich dabei Q als eine in P angreifende, senkrecht zur Längsaxe des Stabes

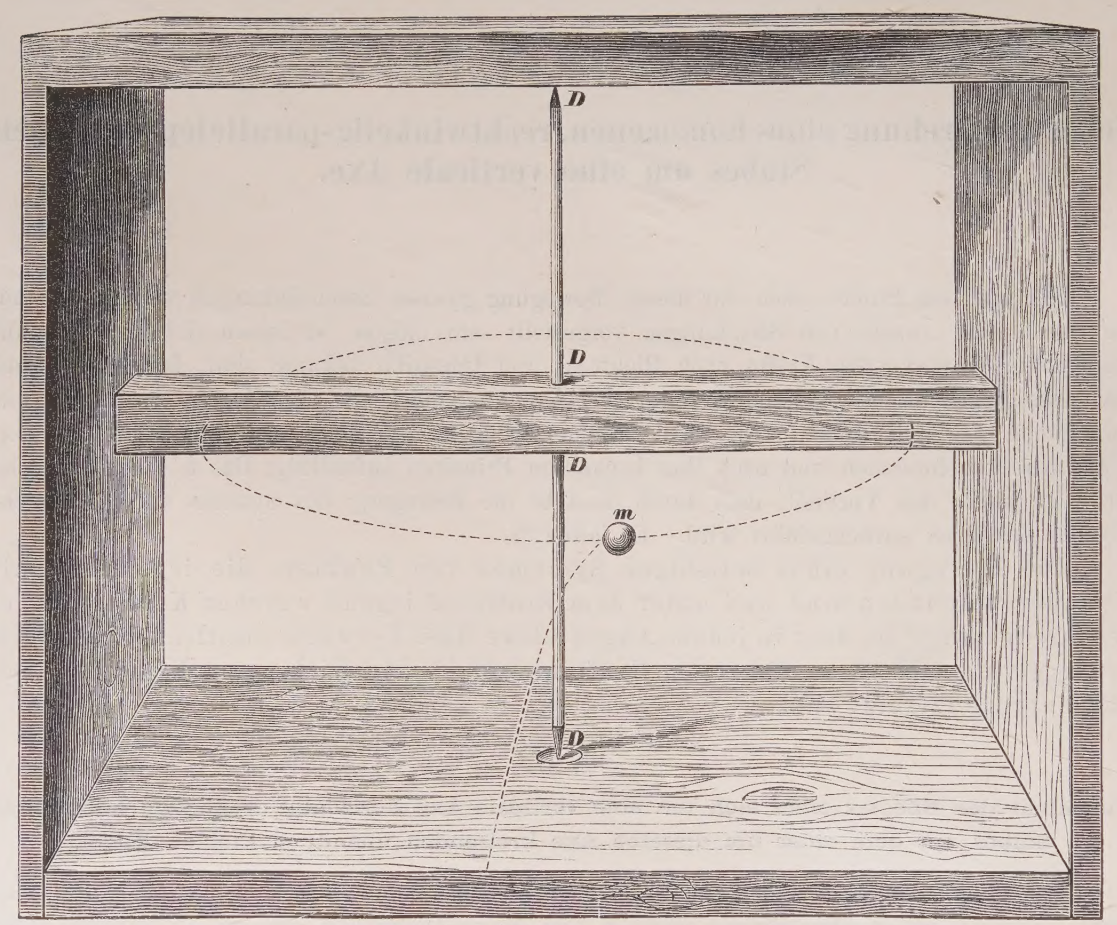

Fig. 1.

horizontal wirkende Momentankraft betrachten, welche — den obigen Bestimmungen gemäss — dem Stabe im betrachteten Moment die Winkelgeschwindigkeit w ertheilt. Versteht man nun unter dem Moment einer Kraft das Product der Kraft in ihren Hebelarm, so ist das Moment der Momentankraft Q durch das Product $Q.x$ repräsentirt. Es handelt sich jetzt darum,

---

Anmerkung zur Fig. 1. Bei Anlegung der Figur wurde gleich auf den im § 21 erwähnten Specialfall einer Schwerpunktsaxe Rücksicht genommen; die Dimensionen entsprechen im Verhältniss dem im § 22 angeführten Zahlenbeispiel.

die Kräfte zu finden, „welche den wirksamen Kräften gleich und entgegengesetzt sind.“ Unter den „wirksamen Kräften“ sind dabei diejenigen verstanden, welche jedem Punkt des gegebenen Systems, diesen als frei gedacht, die Bewegung ertheilen würden, der er wirklich folgt. In dem hier betrachteten Fall ist das Punktsystem ein starrer Stab. Irgend ein materieller Punkt desselben von der Masse $d\mu$ habe in dem obenerwähnten Augenblick die Geschwindigkeit v; dann ist also seine wirksame Kraft $v \,.\, d\mu$, da des Punktes $d\mu$ Bewegungsquantität $v \,.\, d\mu$ offenbar ihm, wenn er frei wäre, dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie die ist, welche er als Punkt des starren Stabes im vorliegenden Fall verfolgt. Da nun die Geschwindigkeit v der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg — hier ein Kreisbogenelement — ist und die Winkelgeschwindigkeit w als der in der Zeiteinheit beschriebene Winkel definirt wurde, so gilt nach geometrischen Gesetzen die Gleichung

$$v = r \,.\, w,$$

wenn r den variabeln Abstand des beliebigen Massenpunktes $d\mu$ von der Drehungsaxe D bedeutet. Statt $v \,.\, d\mu$ hat man also $r \,.\, w \,.\, d\mu$ als wirksame Kraft des Punktes $d\mu$, und das Moment dieser Kraft ist $r^2 \,.\, w \,.\, d\mu$. Das Moment der dieser gleichen und entgegengesetzten Kraft wird demnach $- r^2 \,.\, w \,.\, d\mu$. Dasselbe gilt analog für jeden andern Punkt des Stabes, da $d\mu$ beliebig und dementsprechend r variabel angenommen war. So findet man durch Integration $\int - r^2 \,.\, w \,.\, d\mu$ als Gesammtmoment jener Kräfte oder, da w als Winkelgeschwindigkeit des ganzen Stabes für die einzelnen Punkte desselben im betrachteten Augenblick nicht verschieden, d. h. constant ist, $- w \,. \int r^2 \,.\, d\mu$. Das Integral $\int r^2 \,.\, d\mu$, bezogen auf den Stab, repräsentirt aber das sogenannte Trägheitsmoment des Stabes in Beziehung auf die Drehungsaxe D. Bezeichnet man dieses mit T, so ist $- w \,.\, T$ das Gesammtmoment der Kräfte, welche den wirksamen Kräften gleich und entgegengesetzt sind. Diese sollen nach dem d'Alembert'schen Princip mit der Momentankraft Q, deren Moment $Q \,.\, x$ ist, im Gleichgewicht sein; es muss also die Summe ihrer Momente verschwinden, demnach

$$- w \,.\, T + Q \,.\, x = 0$$

oder

$$Q = \frac{w \,.\, T}{x} \tag{1}$$

sein.

Aehnlich wie also bei Wirkung von constanten Kräften die Winkelbeschleunigung gleich dem Quotienten aus dem Gesammtmoment der Kräfte durch das Trägheitsmoment des Körpers ist, ergiebt sich hier die Gleichung (1), die in der Form

$$w = \frac{Q \,.\, x}{T}$$

analoges für die Momentankraft Q besagt.

Man stelle sich nun vor, eine unendlich kleine Kugel von vorläufig unbestimmter Masse ν rotire statt des Stabes um die Drehungsaxe D mit derselben Winkelgeschwindigkeit w wie der Stab, und zwar auf einer Kreisbahn, deren Radius x ist. Dann ist ihre Bewegungsgrösse

$$q = (x \,.\, w) \,.\, \nu$$
$$= \frac{w \,.\, (x^2 \,.\, \nu)}{x}.$$

Bezeichnet man nun das Trägheitsmoment $x^2 \,.\, r$ dieser Kugel mit τ, so ist

$$q = \frac{w \,.\, \tau}{x}. \tag{2}$$

Wird dabei

$$\nu = \frac{T}{x^2}$$

gesetzt, d. h. ist

$$\tau = T,$$

so ist auch

$$q = Q,$$

d. h. die Wirkung des Stabes in P lässt sich durch die einer unendlich kleinen Kugel von einem in Bezug auf die Drehungsaxe D gleichen Trägheitsmoment $\tau = T$ ersetzen. Da aber P beliebig und demgemäss x variabel angenommen war, auch der verticalen Axe bis dahin im übrigen keine bestimmte Lage angewiesen war, so lässt sich die in einem beliebigen Punkt geäusserte Wirkung eines um eine sonst beliebige verticale Axe sich horizontal drehenden homogenen Stabes in jedem Augenblick durch die einer unendlich kleinen Kugel ersetzen, welche in demselben Abstand wie jener Punkt um dieselbe Axe rotirt, wenn nur das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf die Rotationsaxe dem entsprechenden des Stabes gleich ist und die Kugel in jedem Augenblick dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzt wie der Stab, wie überhaupt für die Drehung Massen von gleichem Trägheitsmoment aequivalent sind.

§ 2.

Hemmung der drehenden Bewegung durch eine in der Rotationsebene befindliche unendlich kleine Kugel.

Nach dem zuletzt Gefundenen ist es demnach gestattet, in den folgenden Betrachtungen überall da, wo es bequemer erscheint, den Stab durch eine unendlich kleine Kugel von den angegebenen Eigenschaften zu ersetzen. Es soll zunächst der Stab und also auch jene Kugel als durchaus unelastisch angesehen werden.

Denkt man sich, dass in dem betrachteten Augenblick, in welchem die Winkelgeschwindigkeit des Stabes, beziehungsweise der Kugel w ist, die rotirende Bewegung durch eine in der Rotationsebene sich befindende unendlich kleine Kugel gehemmt wird, welche von dem Stabe in der horizontalen Mittellinie der Anschlagsfläche an einer Stelle H getroffen wird, die mit dem Punkt P in demselben Querschnitt liegt, so entstehen die Fragen, welche Geschwindigkeit diese Kugel erhält und wie weit sie in Folge dessen unter Einwirkung der Schwerkraft fliegen wird, sowie welche Winkelgeschwindigkeit der Stab in dem auf den Anprall folgenden Augenblick noch besitzt.

Stellt Fig. 2 einen horizontalen Mittelschnitt des Stabes dar, so erkennt man, dass stets

$$DH > x$$

ist. Die Entfernung der zuletzt genannten Kugel ist also nicht x. Indessen ist der Unterschied bei geringer Breite des Stabes, zumal wenn x nicht sehr klein ist, ziemlich unbedeutend,

Fig. 2.

und mag — vor allen der Einfachheit im Ausdruck wegen — an Stelle der Entfernung DH die ihr entsprechende Länge DP, d. h. x gesetzt werden, ohne jedoch bei der schliesslich stattfindenden Ausrechnung diese Ungenauigkeit beizubehalten.

§ 3.

Wirkung des Anpralles auf die Geschwindigkeitsverhältnisse der Kugel und des Stabes.

Die genannte Kugel habe die Masse m und sei durchaus unelastisch.

Stösst die den Stab ersetzende Kugel von der Masse $\frac{T}{x^2}$ mit der Geschwindigkeit $x \,.\, w$ auf die ruhende zweite Kugel von der Masse m, und sind beide Kugeln unelastisch, so wird beiden dadurch eine gleiche Geschwindigkeit u ertheilt, die sich nach einem bekannten Gesetz*) der theoretischen Mechanik aus der Gleichung

$$u = \frac{m_1 \,.\, c_1 + m_2 \,.\, c_2}{m_1 + m_2}$$

ergibt; es bedeuten dabei m_1 und m_2 die Massen der Kugeln, c_1 und c_2 ihre vorherigen Geschwindigkeiten. Im vorliegenden Fall ist

$$m_1 = \frac{T}{x^2}, \quad m_2 = m,$$

$$c_1 = x \,.\, w, \quad c_2 = 0,$$

also

$$u = \frac{\frac{T}{x^2} \,.\, x \,.\, w}{\frac{T}{x^2} + m} \text{ oder}$$

$$u = \frac{T \,.\, x \,.\, w}{T + m \,.\, x^2}. \tag{3}$$

Die Kugel m erhält diese Geschwindigkeit u in der That, während sie sich für die rotirende Kugel, beziehungsweise den Stab in die Winkelgeschwindigkeit

*) S. „Lehrbuch etc. von Duhamel-Schlömilch", II, S. 106 u. a.

$$(4) \qquad w_1 = \frac{u}{x} = \frac{T \,.\, w}{T + m\,x^2}$$

umsetzt. Es erhält also durch den Anprall die Kugel m die Geschwindigkeit $\frac{T \,.\, x \,.\, w}{T + m\,x^2}$, während sich die Winkelgeschwindigkeit des Stabes von w auf $\frac{T \,.\, w}{T + m\,x^2}$ verringert. Eine Verminderung findet selbstverständlich statt, was übrigens auch die Formel zeigt, indem stets

$$T < T + m\,x^2,$$

$$\text{demnach } \frac{T}{T + m\,x^2} < 1,$$

$$\text{also } \frac{T \,.\, w}{T + m\,x^2} < w \text{ ist.}$$

§ 4.

Die durch den Anprall des Stabes an die Kugel m erzielte Wurfweite der letztern.

Es soll nun auch bestimmt werden, wie weit die mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$u = \frac{T \,.\, x \,.\, w}{T + m \,.\, x^2}$$

unter Einwirkung der Schwerkraft sich bewegende Kugel m fliegt.

Lässt man die Drehung der Erde und den Luftwiderstand unbeachtet, so ist die Gleichung der parabolischen Wurfbahn von m bekanntlich

$$(5) \qquad \eta^2 = \frac{2\,u^2 \,.\, \xi}{g},$$

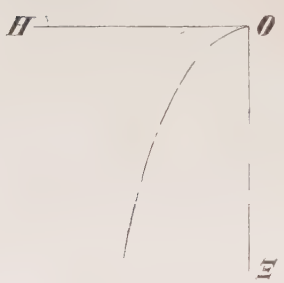

Fig. 3.

wenn das angewendete Coordinatensystem den Scheitel der Parabel zum Anfangspunkt, die Parabelaxe zur Abscissenaxe und die Scheiteltangente zur Ordinatenaxe hat, wenn ferner u die oben besprochene Anfangsgeschwindigkeit, g die Intensität der Schwerkraft ist. Es befinde sich nun Stab und Kugel in der Höhe h über dem Horizont. Dann ergibt sich für die Abscisse h die Ordinate

$$(6) \qquad \eta_h = u \cdot \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \frac{T \,.\, x \,.\, w}{T + m \,.\, x^2} \cdot \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

als Wurfweite der Kugel m.

§ 5.

Verschiedene Geschwindigkeitsverhältnisse je nach der Lage der Kugel m.

Die im § 2 gestellten drei Fragen sind durch die Gleichungen (3), (6) und (4) beantwortet worden; die dadurch gewonnenen Resultate zeigen, dass — was von vornherein anzu-

nehmen war — die Geschwindigkeit und Wurfweite der Kugel, sowie die nach dem Anprall noch vorhandene Winkelgeschwindigkeit des Stabes unter sonst gleichen Umständen von der Entfernung x der Kugel m von der Drehungsaxe D abhängig ist. Auch erkennt man aus der Gleichung (4), dass, je mehr diese Entfernung x zunimmt, desto kleiner die dem Stab noch bleibende Winkelgeschwindigkeit w_1 wird. Man wird nun leicht geneigt sein anzunehmen, dass ebenso mit der Zunahme der genannten Entfernung x auch die der Kugel m ertheilte Geschwindigkeit u und in Folge dessen auch deren Wurfweite η_h zunimmt. Betrachtet man indessen die Gleichungen (3) und (6), so sieht man ein, dass dieser Schluss mindestens übereilt ist.

§ 6.

Die durch die Gleichung (3) $u = \frac{T \,.\, x \,.\, w}{T + m \,.\, x^2}$ vorgestellte Curve.

Nach Gleichung (3) besteht — für verschiedene Werthe von x — die Grösse u aus einem constanten Factor $T \,.\, w$ und einem variabeln Factor $\frac{x}{T + m \,.\, x^2}$. Um zu erfahren, ob u vielleicht einen Maximal- oder Minimalwerth erreicht, muss man bekanntlich den variabeln Factor nach x differentiiren und den erhaltenen Differentialquotienten sowohl verschwinden als auch unendlich gross werden lassen. Nun ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{T + m \,.\, x^2}\right) = \frac{T - m \,.\, x^2}{(T + m \,.\, x^2)^2}.$$

Man hat also als Bedingungen für ein Maximum und Minimum von u die Gleichungen

$$\frac{T - m \,.\, x^2}{(T + m \,.\, x^2)^2} = 0 \text{ und} \tag{7}$$

$$\frac{T - m \,.\, x^2}{(T + m \,.\, x^2)^2} = \infty. \tag{8}$$

Der Gleichung (7) genügt

$$x_1 = \sqrt{\frac{T}{m}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{T}{m}},\ x_3 = \pm\infty,$$

und zwar lässt

$$x = \pm\infty$$

den Ausdruck $\frac{T - m \,.\, x^2}{(T + m \,.\, x^2)^2}$ bestimmt verschwinden, da dann im Nenner ∞ auf der vierten Potenz erscheint, während es im Zähler nur auf der zweiten vorkommt; der Gleichung (8) genügen nur imaginäre Werthe, die für das vorliegende Problem bedeutungslos sind. Der Werth x_3 liefert

$$u = 0, \tag{9}$$

die Werthe x_1 und x_2 liefern bezwse.

$$u = \pm\frac{w}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}. \tag{10}$$

Um zu entscheiden, ob man ein Maximum oder Minimum vor sich hat, differentiirt man bekanntlich zum zweiten mal nach x, und man findet dann

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{T + m \,.\, x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{T - m \,.\, x^2}{(T + m \,.\, x^2)^2}\right)$$
$$= -\,2\,m \,.\, x\,\frac{3\,T - m \,.\, x^2}{(T + m \,.\, x^2)^3}.$$

Je nachdem dieser Ausdruck negativ oder positiv ist, hat man ein Maximum oder Minimum. Er ist nun

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{T^3}} \text{ für } x = \sqrt{\frac{T}{m}},$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{T^3}} \text{ für } x = -\sqrt{\frac{T}{m}},$$
$$0 \text{ für } x = \pm\infty,$$

d. h. für x_1 ist u ein Maximum, für x_2 ein Minimum, für x_3 beides gleichzeitig, insofern man den positiven und negativen Unendlichkeitspunkt als aufeinander fallend betrachtet.

Man wähle nun ein rechtwinkeliges Coordinatenkreuz, auf dem man die Werthe der variabelen Entfernung x als Abscissen und die entsprechenden Werthe der Geschwindigkeit u als Ordinaten anbringt; will man dann die durch Gleichung (3) dargestellte Curve dritten

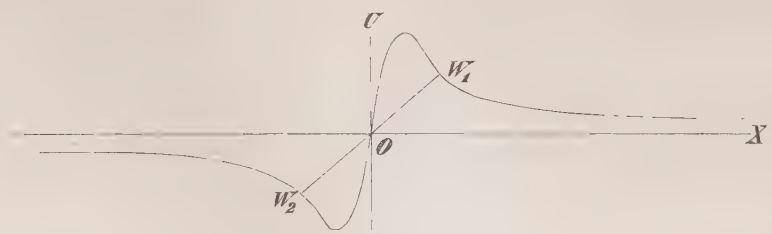

Fig. 4.

Grades construiren, so ergibt ausser dem bereits Gefundenen die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \text{ d. h.}$$
$$(11) \qquad -\,2\,m \,.\, x \,.\, \frac{3\,T - m \,.\, x^2}{(T + m \,.\, x^2)^3} = 0$$

ihre Wendepunkte, nämlich für

$$x = 0,\ x = \sqrt{\frac{3\,T}{m}} \text{ und } x = -\sqrt{\frac{3\,T}{m}},$$

während der ebenfalls die Gleichung (11) befriedigende Werth

$$x = \pm\infty$$

die eben erwähnte Bedeutung hat und beweist, dass die Abscissenaxe eine Asymptote der Curve ist. Nebenbei werde bemerkt, dass die Eigenschaft aller Curven dritten Grades*), wo-

*) S. „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven von G. Salmon, deutsch bearbeitet von W. Fiedler", Leipzig 1873, Art. 126, Beispiel 3,

„Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch", Leipzig 1876, S. 503, u. a.

nach die drei Wendepunkte, welche mindestens vorhanden sein müssen, stets auf einer Geraden liegen müssen, sich an der vorliegenden Curve ganz besonders einfach nachweisen lässt: für

$$x = \pm \sqrt{\frac{3\,T}{m}} \text{ wird } y = \pm \frac{w}{4} \sqrt{\frac{3\,T}{m}},$$

d. h. die Verbindungsgerade der beiden zu diesen Coordinaten gehörenden Wendepunkte geht durch den Coordinatenanfang, welcher der dritte Wendepunkt ist; denn für

$$x = 0 \text{ wird auch } u = 0.$$

§ 7.

Die durch die Gleichung (4) $w_1 = \frac{T \,.\, w}{T + m \,.\, x^2}$ vorgestellte Curve.

Man wähle ein rechtwinkeliges Coordinatenkreuz und trage auf ihm die Werthe von x als Abscissen, die zugehörigen von w_1 als Ordinaten ein. Alsdann construire man die durch

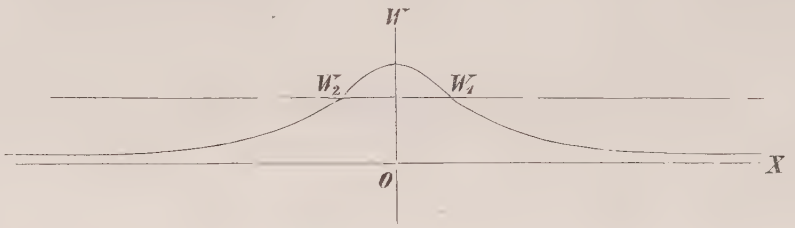

Fig. 5.

Gleichung (4) gegebene Curve. Was das Maximum und Minimum dieser Curve betrifft, so erkennt man aus ihrer Gleichung, dass sie offenbar einen Maximalwerth erhält, wenn

$$x = 0 \text{ ist, nämlich } w_1 = w,$$

und einen Minimalwerth, wenn

$$x = \pm \infty \text{ ist, nämlich } w_1 = 0.$$

Aus letzterem geht zugleich hervor, dass die Abscissenaxe Asymptote der Curve ist. Die Wendepunkte ergeben sich aus der Bedingung

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \text{ d. h.}$$

$$2\,T \,.\, w \,.\, m \frac{3m \,.\, x^2 - T}{(T + m \,.\, x^2)^3} = 0;$$

dieser Gleichung genügen die Werthe

$$x = \infty, \; x = \sqrt{\frac{T}{3m}} \text{ und } x = -\sqrt{\frac{T}{3m}};$$

die zugehörigen Ordinaten sind

$$w_1 = 0, \; w_1 = \frac{3w}{4} \text{ und } w_1 = \frac{3w}{4}.$$

Da die beiden letztern Werthe von w_1 einander gleich sind, so ist die Verbindungsgerade der beiden im Endlichen gelegenen Wendepunkte parallel zur Abscissenaxe, schneidet sie also im Unendlichen, d. h. im dritten Wendepunkt, der die Coordinaten

$$x = \infty, \; w_1 = 0$$

hat. So bestätigt sich auch an dieser Curve dritten Grades obiges Gesetz (s. § 6).

Für den Maximalwerth von u ist

$$w_1 = \frac{w}{2}.$$

§ 8.

Maximalgeschwindigkeit der Kugel m.

Man übertrage nun das im § 6 gefundene auf die Wirkung des Stabes. Die Geschwindigkeit, welche der Kugel m durch den Anprall des Stabes ertheilt wird, ist nach Gleichung (3)

$$u = \frac{T \,.\, x \,.\, w}{T + m \,.\, x^2}.$$

Liegt die Kugel m in unendlicher Entfernung von der Drehungsaxe D, so erhält sie dadurch die Geschwindigkeit null, d. h. sie bleibt liegen. Indessen gilt dies nur für den Fall, dass T nicht unendlich gross auf einer höheren Potenz wird, da sonst

$$u = \frac{T \,.\, x \,.\, w}{T + m \,.\, x^2} = \frac{w}{\frac{1}{x} + \frac{m \,.\, x}{T}} = \frac{w}{0 + 0} = \infty$$

wird. Vorgreifend*) soll aber bemerkt werden, dass ein materieller Stab von nicht verschwindendem Querschnitt stets bei unendlich grosser Länge ein Trägheitsmoment in Bezug auf jede durch ihn gesteckte verticale Axe besitzt, dessen Werth unendlich gross auf der dritten Potenz ist. Die Geschwindigkeit u wird also nur dann null und die Kugel m bleibt liegen, wenn, während sie in unendlicher Entfernung sich befindet, der Stab selbst bei endlichem Querschnitt nicht unendlich lang ist, ein Resultat, dessen Richtigkeit selbstverständlich erscheint, das aber später**) einen etwas paradoxen Zusatz erhält. Ist aber der Stab unendlich lang, so ertheilt er der Kugel, die sich in unendlicher Entfernung befindet, auch eine unendlich grosse Geschwindigkeit. Rückt dann — bei endlichen Dimensionen des Stabes — die Kugel m der Drehungsaxe näher, so wächst die derselben zu ertheilende Geschwindigkeit von null an, bis die Kugel in der Entfernung $\sqrt{\frac{T}{m}}$ ist, an welcher Stelle sie die Geschwindigkeit

$$u = \frac{w}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

erhält, nimmt dann ab und wird null, wenn die Kugel der Drehungsaxe am nächsten ist, indem an dieser Stelle momentan keine Wirkung vorhanden ist. Würde man dann die Kugel

*) S. § 21. — **) S. § 9.

noch weiter rücken und sie dabei auf derselben Seite des Stabes liegen lassen, so würde überhaupt keine weitere Wirkung eintreten; vielmehr muss nunmehr die Kugel auf die andere Seite des Stabes zu liegen kommen. Dann wird aber offenbar bei Drehung des Stabes die Kugel in einer der bisherigen entgegengesetzten Richtung geschleudert, die Geschwindigkeit ist also eine negative. Sie nimmt immer mehr ab (d. h. in entgegengesetzter Richtung zu) und erreicht einen Minimalwerth

$$u = -\frac{w}{2}\sqrt{\frac{T}{m}},$$

wenn die Kugel die Entfernung $-\sqrt{\frac{T}{m}}$ hat; von da an nimmt u wieder zu, bis sich m in der Entfernung $-\infty$ befindet, an welcher Stelle u wieder den Nullwerth erreicht.

Die Wurfweite η_h ist nach Gleichung (6) von der Geschwindigkeit u nur um den constanten Factor $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ verschieden. η_h wird also im Wachsen und Abnehmen bei variabelem x sich ganz entsprechend u verhalten.

§ 9.

Minimalverzögerung des Stabes.

Ueberträgt man ferner auch das im § 7 Gefundene auf den Stab, so erhält man:

Befindet sich die Kugel in unendlicher Entfernung, während der Stab endliche Dimensionen hat, so nimmt durch den Anprall (der aber hier nur ein illusorischer ist) die Winkelgeschwindigkeit des Stabes von w bis null ab. Für die Praxis ist dieser Fall des Unendlichen wegen bedeutungslos; immerhin ist es theoretisch interessant, dass ein Stab von endlichen Dimensionen durch einen (demnach gar nicht stattfindenden) Anprall einer in unendlicher Ferne liegenden Kugel so gehemmt wird, dass er still steht, ohne dass der Kugel irgend welche Geschwindigkeit ertheilt wird.

Der Stab behält eine um so grössere Winkelgeschwindigkeit, je näher der Drehungsaxe D die Kugel m sich befindet. Liegt die Kugel m der Drehungsaxe D möglichst nahe, so verliert der Stab gar keine Winkelgeschwindigkeit. Wenn sich die Kugel m an einer solchen Stelle befindet, dass ihr die grösste Geschwindigkeit $\frac{w}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}$ und damit die grösste Wurfweite $\frac{w}{2}\sqrt{\frac{2h \cdot T}{m \cdot g}}$ nach der einen oder andern Seite hin zu Theil wird, so behält der Stab gerade noch die Hälfte seiner bisherigen Geschwindigkeit.

§ 10.

Die lebendige Kraft von Stab und Kugel.

Die lebendige Kraft eines Systemes von Punkten erhält man, wenn man für jeden Punkt das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit bildet und die so entstandenen

Producte addirt. Die lebendige Kraft des Stabes wird demnach ein Ausdruck von der Form

$$\int \frac{v^2 \cdot d\mu}{2} = \int \frac{(r \cdot w)^2 \cdot d\mu}{2} = \frac{w^2}{2} \cdot \int r^2 \cdot d\mu = \frac{w^2 \cdot T}{2}.$$

Die lebendige Kraft, welche der Stab nach dem Anprall noch besitzt, wird demnach $\frac{w_1^2 \cdot T}{2}$ sein. Die der Kugel wird $\frac{m \cdot u^2}{2}$. Für

$$w_1 = \frac{T \cdot w}{T + m \cdot x^2} \text{ und } u = \frac{T \cdot w \cdot x}{T + m \cdot x^2}$$

hat man dann eine lebendige Kraft des gesammten Apparates

$$\mathcal{A} = \frac{T^3 \cdot w^2}{2(T + m \cdot x^2)^2} + \frac{T^2 \cdot w^2 \cdot m \cdot x^2}{2(T + m \cdot x^2)^2} = \frac{T^2 \cdot w^2 \cdot (T + m \cdot x^2)}{2(T + m \cdot x^2)^2}$$

oder

$$\mathcal{A} = \frac{w^2 \cdot T}{2} \cdot \frac{T}{T + m \cdot x^2}. \tag{12}$$

Für $x = 0$ behält das System seine bisherige lebendige Kraft $\frac{w^2 \cdot T}{2}$, für $x = \sqrt{\frac{T}{m}}$ wird

$$\mathcal{A} = \frac{w^2 \cdot T}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

also halb so gross wie $\frac{w^2 \cdot T}{2}$; mit weiterer Zunahme von x nimmt die lebendige Kraft $\mathcal{A}$ des ganzen Systems stets mehr und mehr ab und wird null, wenn x unendlich gross wird, aber nur unter der Voraussetzung, dass T nicht unendlich gross auf einer höheren Potenz wird; sonst ergibt sich für $\mathcal{A}$ ein stets unendlich grosser Werth. Uebrigens ist $\mathcal{A}$ von w_1 nur um den constanten Factor $\frac{T \cdot w}{2}$ verschieden.

§ 11.

Tabellarische Uebersicht über die verschiedenen Werthe von u, η_h, w_1 und $\mathcal{A}$ bei variabelem x.

Die Uebersicht über die verschiedenen Werthe, welche die Grössen u, η_h, w_1 und $\mathcal{A}$ bei variabelem x annehmen können, wird durch eine einfache Tabelle wesentlich erleichtert. Dabei sollen nur die für besonders merkwürdige Werthe von x geltenden Fälle berücksichtigt, auch angenommen werden, dass der Stab endliche Dimensionen habe. Nach diesen Festsetzungen gilt dann folgende Tabelle:

Vor dem Anprall:	$u = 0$	$\eta_h = 0$	$w_1 = w$	$A = \frac{w^2 . T}{2}$
	Nach dem Anprall:			
x	$u = \frac{T . x . w}{T + m . x^2}$	$\eta_h = \frac{T . x . w}{T + m . x^2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$	$w_1 = \frac{T . w}{T + m . x^2}$	$A = \frac{w^2 . T^2}{2(T + m . x^2)}$
∞	0	0	0	0
$\sqrt{\frac{T}{m}}$	$\frac{w}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}$	$\frac{w}{2}\sqrt{\frac{2h . T}{m . g}}$	$\frac{w}{2}$	$\frac{w^2 . T}{4}$
0	0	0	w	$\frac{w^2 . T}{2}$
$-\sqrt{\frac{T}{m}}$	$-\frac{w}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}$	$-\frac{w}{2}\sqrt{\frac{2h . T}{m . g}}$	$\frac{w}{2}$	$\frac{w^2 . T}{4}$
$-\infty$	0	0	0	0

§ 12.

Wirkung des Stabes auf die Kugel m, wenn diese an einem unendlich dünnen Faden von gegebener Länge befestigt ist.

Will man die bis dahin gefundenen Resultate annähernd experimentell bestätigen, so ergibt sich eine wesentliche Schwierigkeit bei Anbringung der Kugel m in derselben Höhe über dem Horizont wie die Längsaxe des Stabes. Daher empfiehlt es sich, das bis dahin behandelte Problem auch zu untersuchen für den Fall, dass die Kugel m an einem unendlich dünnen Faden von gegebener Länge so befestigt ist, dass sie gerade in der verlangten Höhe über dem Horizont sich befindet, — d. h. für den Fall des mathematischen Kreispendels.

Wird die Länge des Pendels mit l bezeichnet, so setzt sich die der Kugel m ertheilte Geschwindigkeit u in eine Winkelgeschwindigkeit ω um, deren Werth gefunden wird, wenn man u durch l dividirt. Unter Berücksichtigung der Gleichung (3) ist demnach diese Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{T . x . w}{l . (T + m . x^2)}. \tag{13}$$

Dieselbe wird offenbar, da sie von u nur um den constanten Factor $\frac{1}{l}$ verschieden ist, sich bei variabelem x analog u verhalten, vor allen auch für denselben Werth von x ein Maximum werden wie u; und zwar wird dieser Maximalwerth

$$\omega = \frac{w}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} \tag{14}$$

sein. Das Minimum, sowie weitere Specialwerthe von ω entsprechen ebenfalls den analogen Fällen für u.

So wie nun im § 4 die Wurfweite der frei beweglichen Kugel m berechnet wurde, lässt sich hier die Frage nach dem Ausschlagswinkel und dem Ausschlagsbogen des Pendels aufstellen, welche bei vorheriger Ruhelage desselben durch den Anprall des Stabes hervorgebracht werden. Dazu bedarf es aber einiger einleitenden Betrachtungen.

§ 13.

Der Satz von der lebendigen Kraft und der Kräftefunction.

Die Lagrange'schen Differentialgleichungen der Bewegung, und zwar in ihrer ersten Form, liefern einen wichtigen Satz der analytischen Mechanik folgenden Inhalts:*)

Steht ein Punktsystem unter dem Einfluss von beliebigen Kräften, so ist die lebendige Kraft des ganzen Systemes stets von der Kräftefunction (falls eine solche vorhanden ist) nur durch eine additive Constante verschieden, welche letztere sich aus einem gegebenen Momentanzustand des Systemes bestimmt.

Zur Klarstellung des Begriffes der Kräftefunction diene hierbei folgende Erklärung:

Wirken auf die Punkte $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ der Reihe nach die Kräfte $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ und sind X_1, Y_1, Z_1 die in der Richtung der Coordinatenaxen zu construirenden rechtwinkeligen Componenten von P_1, X_2, Y_2, Z_2 die von $P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n, Y_n, Z_n$ die von P_n, sind ferner x_1, y_1, z_1 die auf jene Coordinatenaxen bezogenen Coordinaten von m_1, x_2, y_2, z_2 die von $m_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n, y_n, z_n$ die von m_n, so ist die Kräftefunction diejenige Function K der Coordinaten, welche den Gleichungen

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial K}{\partial x_1} = X_1, \quad \dfrac{\partial K}{\partial y_1} = Y_1, \quad \dfrac{\partial K}{\partial z_1} = Z_1, \\ \dfrac{\partial K}{\partial x_2} = X_2, \quad \dfrac{\partial K}{\partial y_2} = Y_2, \quad \dfrac{\partial K}{\partial z_2} = Z_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial K}{\partial x_n} = X_n, \quad \dfrac{\partial K}{\partial y_n} = Y_n, \quad \dfrac{\partial K}{\partial z_n} = Z_n \end{array}\right.$$

genügt.

Jener Satz lautet demnach

$$(16)\qquad L = K + C,$$

wenn mit L die lebendige Kraft des Systemes, mit C die oben erwähnte Constante bezeichnet wird.

§ 14.

Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft und der Kräftefunction auf das mathematische Kreispendel.

Will man den im vorigen Paragraphen gefundenen Satz auf das vorliegende Problem

*) S. „Theorie der Bewegung und der Kräfte von W. Schell", Leipzig 1870, S. 912 u. a.

anwenden, so hat man zunächst die lebendige Kraft und die Kräftefunction des Pendels, die es nach dem Anprall besitzt, zu bestimmen.

In jedem Moment wirkt auf den schweren Punkt m des Pendels die Schwerkraft, deren Componenten bei dem hier gewählten Coordinatensystem

$$X = m \,.\, g, \quad Y = 0$$

sind. Demnach ist

$$K = m \,.\, g \,.\, x$$

oder, wenn das Pendel mit der Ruhelage den veränderlichen Winkel φ bildet,

$$K = m \,.\, g \,.\, l \,.\, \cos \varphi. \tag{17}$$

Ferner ist der Definition nach

$$L = \frac{m \,.\, v^2}{2};$$

es ist aber

$$v = \frac{ds}{dt},$$

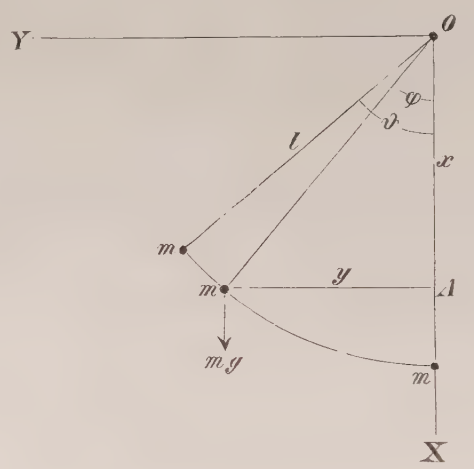

Fig. 6.

wenn ds das Bogenelement, dt das Zeitelement angibt; auch ist

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Demnach ist

$$L = \frac{m}{2} \cdot \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right].$$

Da nun

$$x = l \,.\, \cos \varphi, \quad y = l \,.\, \sin \varphi,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = -\, l \,.\, \sin \varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = l \,.\, \cos \varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt}$$

ist, hat man die Gleichung

$$L = \frac{m}{2} \cdot \left[l^2 \,.\, \sin^2 \varphi \,.\, \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + l^2 \,.\, \cos^2 \varphi \,.\, \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] \text{ oder}$$

$$L = \frac{m \,.\, l^2}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{18}$$

Auf Grund der Gleichungen (17) und (18) nimmt dann der im vorigen Paragraphen entwickelte Satz hier folgende Form an:

$$\frac{m \,.\, l^2}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = m \,.\, g \,.\, l \,.\, \cos \varphi + C. \tag{19}$$

Für die Ruhelage ist

$$\varphi = 0 \text{ und } \frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

da $\frac{d\varphi}{dt}$ der im Zeitelement dt von dem Pendel beschriebene Winkel, also ω ist. Die Gleichung (19) wird demnach für diesen Fall

$$\frac{m \cdot l^2}{2} \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot l + C. \tag{20}$$

Nennt man ϑ den Ausschlagswinkel, so ist für den höchsten Stand des Pendels

$$\varphi = \vartheta \text{ und } \frac{d\varphi}{dt} = O.$$

Man hat dafür also die Gleichung

$$O = m \cdot g \cdot l \cdot \cos\vartheta + C. \tag{21}$$

Subtrahirt man die Gleichungen (20) und (21), so bleibt

$$\frac{m \cdot l^2}{2} \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot l \,(1 - \cos\vartheta) \text{ oder}$$

$$\frac{l \cdot \omega^2}{4g} = \frac{1 - \cos\vartheta}{2}, \text{ d. h.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\omega}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ oder} \\ \vartheta = 2\, arc\left(\sin = \frac{\omega}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}\right). \end{array} \right. \tag{22}$$

Die Grösse dieses Winkels ϑ hängt in erster Linie von der Winkelgeschwindigkeit ω ab, und zwar in der Weise, dass für ein Maximum von ω zunächst $\sin\frac{\vartheta}{2}$ und folglich auch innerhalb der Grenzen von null bis $\frac{\pi}{2}$ der Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ und der Winkel ϑ ein Maximum wird. Das Maximum von ω ist nach Gleichung (14) $\frac{w}{2l} \cdot \sqrt{\frac{T}{m}}$; für diesen Fall ist demnach

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{w}{4l} \cdot \sqrt{\frac{l \cdot T}{m \cdot g}} = \frac{w}{4} \cdot \sqrt{\frac{T}{m \cdot g \cdot l}}. \tag{23}$$

Sollte die Winkelgeschwindigkeit w des Stabes so gering sein, dass das Pendel durch den Anprall nur zu kleinen Oscillationen veranlasst wird, so ist bekanntlich seine Schwingungsdauer

$$\tau = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{24}$$

Für diesen Fall ist demnach

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\omega \cdot \tau}{2\pi}. \tag{25}$$

Dabei ist die Zeit t, welche das Pendel von der Ruhelage aus bis zur Erreichung des höchsten Punktes brauchte, gleich der halben Schwingungsdauer, folglich

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\omega \cdot t}{\pi}, \tag{26}$$

demnach für den Fall des Maximalausschlags

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{w \,.\, t}{2\pi \,.\, l} \cdot \sqrt{\frac{T}{m}} \tag{27}$$

In diesem Fall ist die Winkelgeschwindigkeit w_1 des Stabes, die er nach dem Anprall noch besitzt, gerade halb so gross als die bisherige Winkelgeschwindigkeit w; es ist also

$$\frac{w \,.\, t}{2} = w_1 \,.\, t = \frac{v \,.\, t}{x} = \frac{s_1}{x},$$

wenn v die Geschwindigkeit des Punktes P nach dem Anprall und s_1 der von ihm während der Zeit t, d. h. während das Pendel bis zu seinem höchsten Stand gelangt, zurückgelegte Weg ist. Auch ist für diesen Fall $\sqrt{\frac{T}{m}}$ identisch mit x. Endlich aber ist $\pi \,.\, l$ die Länge λ eines mit l als Radius beschriebenen Halbkreises. Demnach ist

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{s_1}{x \,.\, \lambda} \cdot x \text{ oder}$$

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{s_1}{\lambda}, \tag{28}$$

d. h. wenn das Pendel am weitesten ausschlägt unter Einwirkung des rotirenden Stabes, so ist der Quotient aus dem während dieses Ausschlages von dem Anprallpunkt des Stabes beschriebenen Weg, dividirt durch die Halbkreislinie, welche man mit dem Pendel bei unveränderter Länge beschreiben kann, gleich dem Sinus des halben Ausschlagswinkels, vorausgesetzt, dass dieser nicht sehr gross ist.

Für grössere Oscillationen ist hingegen

$$t = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2} + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^2 \cdot \sin^4\frac{\vartheta}{2} + \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\right)^2 \cdot \sin^6\frac{\vartheta}{2} + \ldots\ldots\right], \tag{29}$$

demnach gemäss Gleichung (22)

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\omega \,.\, t}{\pi \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2} + \ldots\ldots\right]} \tag{30}$$

oder

$$\sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2} + \ldots\ldots\right] = \frac{\omega \,.\, t}{\pi} \tag{31}$$

und für den Fall des Maximalausschlags

$$\sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2} + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right) \cdot \sin^4\frac{\vartheta}{2} + \ldots\ldots\right] = \frac{s_1}{\lambda}. \tag{32}$$

Der dabei in diesem Speciallfall von der Kugel m beschriebene Weg — ein Kreisbogen — ist

$$s_0 = l \,.\, \vartheta = 2\, l \,.\, arc\left(\sin = \frac{w}{4} \cdot \sqrt{\frac{T}{m \,.\, g \,.\, l}}\right)$$

oder, da dann nach Gleichung (10)

$$u = \frac{w}{2} \cdot \sqrt{\frac{T}{m}}$$

ist,

$$s_0 = 2\,l\,.\,arc\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{l\,.\,g}}\right). \tag{33}$$

§ 15.

Wirkung des Stabes auf ein cycloïdisches Pendel.

Der Punkt m sei ferner gezwungen, sich auf cycloïdischer Bahn zu bewegen, und es sei a der Parameter der Cycloïde. Unter Anwendung des im § 13 angeführten Satzes erhält man auch hier, nach Wahl des entsprechenden Coordinatensystems, die Gleichung

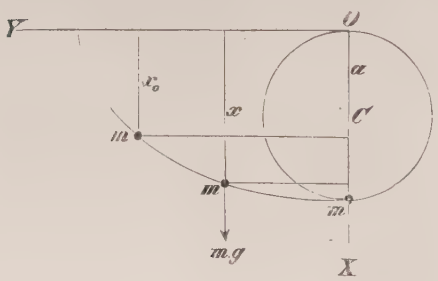

Fig. 7.

$$\frac{m\,.\,v^2}{2} = m\,.\,g\,.\,x + C, \tag{34}$$

welche für den Anfangszustand die Form

$$\frac{m\,.\,u^2}{2} = m\,.\,g\,.\,2a + C \tag{35}$$

und für den höchsten Stand die Form

$$O = m\,.\,g\,.\,x_0 + C \tag{36}$$

annimmt, wenn x_0 die Abscisse des höchsten Standes von m angibt. Durch Subtraction der Gleichungen (35) und (36) erhält man dann

$$\frac{m\,.\,u^2}{2} = m\,.\,g\,(2a - x_0) \text{ oder}$$

$$x_0 = 2a - \frac{u^2}{2g}. \tag{37}$$

Die bekannte Gleichung der Cycloïde lautet nun für das hier gewählte Coordinatensystem

$$y = \pi\,.\,a - a\,.\,arc\left(cos = \frac{a - x}{a}\right) + \sqrt{2a\,.\,x - x^2}, \tag{38}$$

also ist

$$dy = -\frac{x\,.\,dx}{\sqrt{2a\,.\,x - x^2}}. \tag{39}$$

Ferner findet man den Bogen σ aus der Gleichung

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{40}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (39) und (40) erhält man, wenn man die Gleichung (40) in der Form

$$d\sigma = \sqrt{\frac{(-\sqrt{2a\,.\,x - x^2})^2\,.\,dx^2 + (-\sqrt{2a\,.\,x - x^2})^2\,.\,dy^2}{(-\sqrt{2a\,.\,x - x^2})^2}}$$

wählt.

$$d\sigma = \sqrt{\frac{(2a \,.\, x - x^2) \,.\, dx^2 + x^2 \,.\, dx^2}{(-\sqrt{2a - x} \,.\, \sqrt{x})^2}} \text{ oder}$$

$$d\sigma = \sqrt{\frac{2a \,.\, x \,.\, dx^2}{(-\sqrt{2a - x})^2 \,.\, x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2a} \,.\, dx}{-\sqrt{2a - x}} = -\sqrt{\frac{2a}{2a - x}} \cdot dx.$$

Folglich ist

$$\sigma = -\sqrt{2a} \,.\, \int_{2a}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2a - x}}, \text{ d. h.}$$

$$\sigma = 2\sqrt{2a} \,.\, (2a - x). \tag{41}$$

Daraus folgt, dass

$$x = 2a - \frac{\sigma^2}{8a}$$

und für den höchsten Stand

$$x_0 = 2a - \frac{\sigma_0^2}{8a}$$

ist, wenn σ_0 der ganze von der Kugel zurückgelegte Weg ist. Gleichung (37) wird sonach

$$2a - \frac{\sigma_0^2}{8a} = 2a - \frac{u^2}{2g} \text{ oder}$$

$$\sigma_0 = 2u \,.\, \sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{42}$$

Ist nun der bis dahin unbestimmt gelassene Parameter a durch die Gleichung

$$sin\left(\frac{u}{\sqrt{a \,.\, g}}\right) = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}, \tag{43}$$

welche durch

$$a = \frac{u}{g \,.\, 3{,}591867\ldots.} \tag{44}$$

befriedigt wird, bestimmt, so lässt sich der Werth von σ_0 weiter umformen. Es ist dann

$$arc\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right) = \frac{u}{\sqrt{a \,.\, g}} \text{ oder}$$

$$a = \frac{u^2}{g \,.\, arc^2\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right)} \text{ und} \tag{45}$$

$$\frac{u}{g \,.\, arc\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right)} = \sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{46}$$

Durch Multiplication der Gleichungen (45) und (46) entsteht

$$\frac{a \,.\, u}{g \,.\, arc\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right)} = \frac{u^2}{g \,.\, arc^2\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ oder}$$

$$a = \frac{u}{arc\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ oder}$$

$$2a \,.\, arc\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right) = 2u \,.\, \sqrt{\frac{a}{g}}, \text{ demnach}$$

$$\sigma_0 = 2a \,.\, arc\left(sin = \frac{u}{2\sqrt{a \,.\, g}}\right), \tag{47}$$

ein Resultat, welches der Gleichung (33) des vorigen Paragraphen durchaus analog ist.

§ 16.

Wirkung des Stabes auf einen Punkt m, der gezwungen ist, auf einer beliebigen ebenen Curve von stetiger Krümmung zu bleiben.

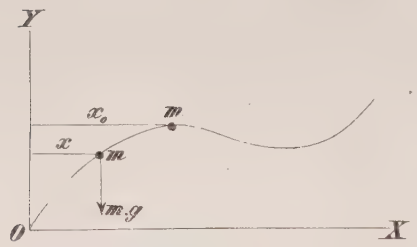

Fig. 8.

Ist endlich der Punkt m gezwungen, sich auf einer beliebigen ebenen Curve von stetiger Krümmung zu bewegen, so lege man das Coordinatenkreuz so, dass m in der Ruhelage sich im Coordinatenanfang befindet, dass ferner die Abscissenaxe horizontal nach rechts und die Ordinatenaxe vertical nach oben gerichtet ist. In Bezug auf dieses System sei die Gleichung der Curve

$$x = f(y). \tag{48}$$

Die auf m wirkende Schwerkraft hat dann die Componenten

$$x = 0, \quad y = -m \,.\, g.$$

Es ist also die Kräftefunction

$$K = -m \,.\, g \,.\, y.$$

Da ferner die lebendige Kraft

$$L = \frac{m \,.\, v^2}{2}$$

ist, findet man nach dem im § 13 entwickelten Satz

$$\frac{m \,.\, v^2}{2} = -m \,.\, g \,.\, y + C. \tag{49}$$

Für den Anfang der Bewegung ist

$$v = u \text{ und } y = 0,$$

also

$$\frac{m \,.\, u^2}{2} = C. \tag{50}$$

Für den höchsten Stand von m, der durch die Coordinaten x_0 und y_0 bestimmt sei, ist

$$v = 0, \quad \text{also}$$

$$0 = -m \cdot g \cdot y_0 + C. \tag{51}$$

Aus den Gleichungen (50) und (51) folgt

$$\frac{m \cdot u^2}{2} = m \cdot g \cdot y_0 \quad \text{oder}$$

$$y_0 = \frac{u^2}{2g}. \tag{52}$$

Wenn auch hier ds das Bogenelement der Curve ist, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und wegen Gleichung (48)

$$dx = f'(y) \cdot dy,$$

also

$$ds = \sqrt{dy^2 + f'(y)^2 \cdot dy^2}$$
$$= \sqrt{1 + f'(y)^2} \cdot dy,$$

folglich

$$s = \int \sqrt{1 + f'(y)^2} \cdot dy. \tag{53}$$

Will man demnach wissen, wie gross der von m zurückgelegte Weg s_0 ist, so braucht man dem in Gleichung (53) angegebenen unbestimmten Integral s nur noch die Grenzen

$$y = 0 \text{ und } y = \frac{u^2}{2g}$$

anzufügen. So hat man dann

$$s_0 = \int_0^{\frac{u^2}{2g}} \sqrt{1 + f'(y)^2} \cdot dy. \tag{54}$$

Ist (wie in dem mehrfach betrachteten Fall)

$$u = \frac{w}{2} \cdot \sqrt{\frac{T}{m}},$$

so ist

$$s_0 = \int_0^{\frac{w^2 \cdot T}{8m \cdot g}} \sqrt{1 + f'(y)^2} \cdot dy. \tag{55}$$

§ 17.

Aenderung der Wirkung in dem Fall, dass die Kugel m elastische Eigenschaften zeigt.

Eine sich mit der Geschwindigkeit c bewegende unelastische Kugel erhält, wie bereits erwähnt, durch einen Stoss eine andere Geschwindigkeit u; es findet also ein (positiver oder negativer) Geschwindigkeitszuwachs $u - c$ statt. Ist aber jene Kugel elastisch, so findet ein weiterer Geschwindigkeitszuwachs $v - u$ statt, wenn v die in diesem Fall erzielte Geschwin-

digkeit ist. Dieser Zuwachs $v - u$ ist höchstens so gross als der vorher genannte $u - c$, und zwar dann, wenn jene Kugel vollkommen elastisch ist; im allgemeinen aber ist

$$\frac{r - u}{u - c} < 1.$$

Dieser Quotient, der also bei vollkommener Elasticität der Kugel den Werth 1 hat, werde mit ε bezeichnet und die Expansion der Kugel genannt. Dann ist also

$$\frac{r - u}{u - c} = \varepsilon \text{ oder}$$

$$v = (1 + \varepsilon) \cdot u - \varepsilon \cdot c. \tag{56}$$

Im vorliegenden Problem hat nun offenbar c den Nullwerth, est ist also

$$v = (1 + \varepsilon) \cdot u, \tag{57}$$

eine Gleichung, die für den Fall, dass ε verschwindet, d. h. wenn die Kugel m, wie bisher angenommen, unelastisch ist, die Identität von v und u beweist.

Denkt man sich den rotirenden Stab in der im § 1 angegebenen Weise durch eine Kugel ersetzt, so wird die Gleichung (56) für diese, wenn dieselbe unelastisch ist,

$$w_1 \cdot x = u, \tag{58}$$

woraus auch hier die Gleichung (4) folgt. Die Geschwindigkeitsverhältnisse des Stabes sind also, so lange dieser selbst unelastisch ist, von den Elasticitätsverhältnissen der Kugel m unabhängig. Da übrigens aus Gleichung (57) hervorgeht, dass in jedem gegebenen Fall v von u nur durch einen constanten Factor verschieden ist, so werden sich für die den Paragraphen 3, 4, 5, 6, 8 u. a. entsprechenden Betrachtungen ganz analoge Resultate ergeben, während die Paragraphen 7 und 9 in Folge der Identität der Gleichungen (4) und (58) hier volle Giltigkeit haben. Nur die Betrachtungen des § 10 sollen für den vorliegenden Fall selbständig entwickelt werden.

§ 18.

Die lebendige Kraft des Apparates für den Fall, dass die Kugel m elastisch ist.

Analog den Resultaten des § 10 findet man, dass die lebendige Kraft des Apparates vor dem Anprall $\frac{w^2 \cdot T}{2}$ und nach dem Anprall $\frac{w_1^2 \cdot T}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2}$ ist.

Für

$$w_1 = \frac{T \cdot w}{T + m \cdot x^2} \text{ und } v = (1 + \varepsilon) \cdot u = \frac{(1 + \varepsilon) \cdot T \cdot w \cdot x}{T + m \cdot x^2}$$

ist also in diesem Fall

$$A = \frac{T^2 \cdot w^2 + (1 + \varepsilon)^2 \cdot T^2 \cdot w^2 \cdot m \cdot x^2}{2 (T + m \cdot x^2)^2}$$

oder

$$A = \frac{T^2 \cdot w^2 \cdot [T + (1 + \varepsilon)^2 \cdot m \cdot x^2]}{2 (T + m \cdot x^2)^2} \tag{59}$$

Ist dabei die Kugel m vollkommen elastisch, also ε gleich der Einheit, so wird

$$v = 2u, \tag{60}$$

d. h. die Kugel m erhält eine doppelt so grosse Geschwindigkeit als in dem vorhergehenden Fall, in welchem m unelastisch war; denn sie strebt, nachdem sie momentan zusammengedrückt war (ohne jedoch die Elasticitätsgrenze zu überschreiten), ihre ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, wodurch sie gleichsam einen abermaligen Stoss erleidet.*)

In diesem Fall wird dann die Gleichung (59)

$$A = \frac{T^2 \cdot w^2 \cdot (T + 4m \cdot x^2)}{2(T + m \cdot x^2)^2}. \tag{61}$$

Für den mehrfach erwähnten Werth

$$x = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

erhält man

$$A = \frac{5w^2 \cdot T}{8}, \tag{62}$$

sodass also die bisherige lebendige Kraft $\frac{w^2 \cdot T}{2}$ um $\frac{w^2 \cdot T}{8}$ zugenommen hat. Da aber nach dem sogenannten Princip der lebendigen Kraft**) während eines Zeitelementes der Zuwachs der lebendigen Kraft stets gleich der unterdessen geleisteten Gesammtarbeit ist, so würde durch den Zusammenstoss hier eine Arbeit gleich $\frac{w^2 \cdot T}{8}$ geleistet sein.

§ 19.

Geschwindigkeitsverhältnisse bei Elasticität des ganzen Apparates.

Ersetzt man zunächst wieder in derselben Weise wie im § 1 den Stab durch eine Kugel und ertheilt ihr die Expansion ε_1, der Kugel m aber die Expansion ε_2, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

Jene erstere Kugel hat die Anfangsgeschwindigkeit $w \cdot x$ und gelangt zu der Geschwindigkeit $w_1 \cdot x$. Für sie lautet also Gleichung (56)

$$w_1 \cdot x \quad (1 + \varepsilon_1) \cdot u - \varepsilon_1 \cdot w \cdot x,$$

während für die Kugel m die entsprechende Gleichung

$$v = (1 + \varepsilon_2) \cdot u$$

gilt. Hieraus folgt

$$w_1 = w \cdot \frac{T - \varepsilon_1 \cdot m \cdot x^2}{T + m \cdot x^2} \text{ und} \tag{63}$$

*) S. „Mathematischer Supplementband zum Grundriss der Physik und Meteorologie von J. Müller", Braunschweig 1866, S. 88, u. a.

**) S. „Lehrbuch etc. von Duhamel-Schlömilch, II. S. 97,
„Theorie etc. von Schell", S. 899.
u. a.

$$(64) \qquad v = \frac{(1 + \varepsilon_2) \cdot T \cdot x \cdot w}{T + m \cdot x^2}.$$

Gleichung (64) weicht von dem früheren Resultat (3) nur in dem constanten Factor $1 + \varepsilon_2$ ab, Gleichung (63) zeigt beträchtliche Unterschiede mit der ihr entsprechenden Gleichung (4). Indessen sind dieselben nur formell; man braucht nur beiderseits $w \cdot \varepsilon_1$ zu addiren, so hat man in Gleichung (63)

$$w_1 + w \cdot \varepsilon_1 \qquad w \cdot \left(\frac{T - \varepsilon_1 \cdot m \cdot x^2}{T + m \cdot x^2} + \varepsilon_1 \right)$$

$$\frac{(1 + \varepsilon_1) \cdot T \cdot w}{T + m \cdot x^2}$$

$$\frac{v}{x},$$

also ein Analogon der Gleichung (4).

§ 20.

Die lebendige Kraft und die Bewegungsquantität des Apparates, wenn dieser durchweg elastisch ist.

Die ursprüngliche lebendige Kraft $\frac{w^2 \cdot T}{2}$ ändert sich um in $\frac{w_1^2 \cdot T}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2}$, d. h. nach den Gleichungen (63) und (64) in

$$A = \frac{w^2 \cdot T}{2} \cdot \left(\frac{T - \varepsilon_1 \cdot m \cdot x^2}{T + m \cdot x^2} \right)^2 + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{(1 + \varepsilon_2) \cdot T \cdot x \cdot w}{T + m \cdot x^2} \right)^2 \text{ oder}$$

$$(65) \qquad A = \frac{w^2 \cdot T}{2} \cdot \frac{T \cdot (T + m \cdot x^2) - 2\,T \cdot m \cdot x^2 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + m \cdot x^2 \cdot (\varepsilon_2^2 \cdot T + \varepsilon_1^2 \cdot m \cdot x^2)}{(T + m \cdot x^2)^2}.$$

Für den Fall der vollkommenen Elasticität, d. h. für

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$$

ist dann

$$(66) \qquad A = \frac{w^2 \cdot T}{2}.$$

Es ergibt sich so ein Satz,*) der allgemein gilt und folgendermassen lautet:

Bei vollkommen elastischen Körpern ist die lebendige Kraft nach wie vor dem Stosse dieselbe.

Nach Gleichung (1) besitzt der Stab vor dem Zusammentreffen mit der Kugel m die Bewegungsquantität $\frac{w \cdot T}{x}$, die sich also nachher umwandelt in $\frac{w_1 \cdot T}{x}$; die Bewegungsquantität der Kugel wird $m \cdot v$. Man hat also dann eine gesammte Bewegungsquantität

$$K = \frac{w_1 \cdot T}{x} \cdot \frac{T - \varepsilon_1 \cdot m \cdot x^2}{T + m \cdot x^2} + \frac{m \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot T \cdot x \cdot w}{T + m \cdot x^2} \text{ oder}$$

*) S. „Theorie etc. von Schell", S. 903, u. a.

$$(67) \qquad K = \frac{w \,.\, T}{x} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{T + m \,.\, x^2} \,.\, m \,.\, x^2\right).$$

Für gleiche Expansion wird

$$(68) \qquad K = \frac{w \,.\, T}{x}, \text{ d. h.}$$

bei gleich elastischen Körpern ist die Bewegungsquantität nach wie vor dem Stosse dieselbe.

§ 21.

Das Trägheitsmoment T.

Um nun das mehrfach erwähnte Trägheitsmoment T des Stabes zu berechnen, mag zunächst angenommen werden, die verticale Drehungsaxe D gehe durch den Schwerpunkt des Stabes (s. Fig. 1). Das Trägheitsmoment eines homogenen, rechtwinkelig-parallelepipedischen Stabes, welcher sich horizontal dreht, in Bezug auf eine verticale Schwerpunktsaxe wird gefunden*), wenn man den dritten Theil der Masse des Stabes mit dem Quadrat derjenigen Entfernung multiplicirt, welche die Drehungsaxe von den verticalen Seitenkanten des Stabes hat. Bezeichnet man die Länge des Stabes mit b, seinen Querschnitt, der als Quadrat angenommen werde, mit a^2, seine Dichtigkeit mit ϱ, so ist

$$M = a^2 \,.\, b \,.\, \varrho$$

die Masse des Stabes. Jene Entfernung aber ist

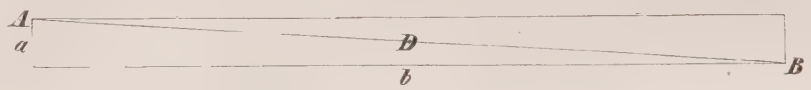

Fig. 9.

$$DA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

ihr Quadrat also $\frac{a^2 + b^2}{4}$. So gelangt man zu der Gleichung

$$(69) \qquad T = \frac{(a^2 + b^2) \,.\, a^2 \,.\, b \,.\, \varrho}{12}.$$

Bei dieser Axenlage, die sich für praktische Zwecke am meisten empfiehlt, hat der Stab das kleinste Trägheitsmoment. Jedes andere derartige Trägheitsmoment**) übertrifft dasselbe um das zu addirende Product aus der Masse des Stabes in das Quadrat des Abstandes der zugehörigen Axe von der ihr parallelen Schwerpunktsaxe. Für eine im Abstand d vom Schwerpunkt gelegte Verticalaxe hat man demnach das Trägheitsmoment

$$(70) \qquad T_d = \frac{(a^2 + b^2 + 12 d^2) \,.\, a^2 \,.\, b \,.\, \varrho}{12},$$

*) S. „Theorie etc. von Schell", S. 739 u. a.

**) S. „Lehrbuch der Experimental-Physik von A. Wüllner", Leipzig 1866, erster Band, S. 106 u. a.

speciell für eine durch die Mitte einer der beiden quadratischen Seitenflächen gehende Axe, deren Entfernung vom Schwerpunkt also $\frac{b}{2}$ beträgt,

$$T_{\frac{b}{2}} = \frac{(a^2 + 4b^2) \cdot a^2 \cdot b \cdot \varrho}{12}. \tag{71}$$

Aus der allgemeinen Gleichung (70) erkennt man, dass bei endlichem Querschnitt a^2, aber unendlich grosser Länge b des Stabes

$$T = \infty^3$$

wird, ein Resultat, dessen schon im § 8 Erwähnung geschah.

§ 22.

Specielle Fälle des Problems (Zahlenbeispiel).

In den Paragraphen 6 und 8 ist auseinandergesetzt worden, dass unter allen Umständen der Punkt m in der Entfernung $\sqrt{\frac{T}{m}}$ von der Drehungsaxe D eine Maximalwirkung seitens des Stabes erfährt. In dem allgemeinen Fall, dass die Drehungsaxe D vom Schwerpunkt die Entfernung d hat [s. Gleichung (70)], wird der bewusste Maximalpunkt nicht mehr auf dem Stab liegen, wenn die Länge $\sqrt{\frac{T}{m}}$ grösser ist als die Entfernung des vorderen Stabendes von der Drehungsaxe, d. h. für

$$\sqrt{\frac{T}{m}} > d + \frac{b}{2} \text{ oder}$$

$$T > m \cdot \left(d + \frac{b}{2}\right)^2, \tag{72}$$

also wenn das Trägheitsmoment des Stabes in Bezug auf die Drehungsaxe D grösser ist als das Trägheitsmoment der an das vordere Ende des Stabes gedachten Kugel m in Bezug auf dieselbe Axe. Für den Specialfall einer Schwerpunktsaxe lautet die Bedingung

$$T > m \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

für den Fall einer Axe, die durch die Mitte einer der beiden quadratischen Seitenflächen geht [s. Gleichung (71)],

$$T > m \cdot b^2.$$

In allen diesen Fällen ist demnach das berechnete Maximum nur ein ideales, das thatsächliche Maximum liegt dabei natürlich am Ende des Stabes.

Ist

$$T = m \cdot \left(d + \frac{b}{2}\right)^2, \tag{73}$$

so befindet sich die Stelle, an welcher der Kugel m die grösste Geschwindigkeit ertheilt wird, genau am vorderen Ende des Stabes.

Ist aber endlich

$$T < m \cdot \left(d + \frac{b}{2}\right)^2, \tag{74}$$

so existirt eine Maximalstelle auf dem Stabe, und es bekommt in diesem Fall die Kugel m nicht die grösste Geschwindigkeit, wenn sie vom Ende des Stabes getroffen wird. Die Paragraphen 7 und 9 lehren nun zwar, dass der Stab, wenn er die Kugel m mit seinem Ende trifft, jedenfalls am meisten Geschwindigkeit verliert, also den härtesten Schlag ertheilt; indessen macht sich die Trägheit der Kugel am meisten geltend, wenn sie am härtesten getroffen wird, d. h. sie leistet dem härtesten Schlag den meisten Widerstand, und da also dieser Widerstand nicht für alle Positionen von m der gleiche ist, so wird der überwiegende Theil der Stosskraft eine bestimmte Stelle des Stabes für sein Maximum erfordern, welche nur im Speciallfall der Gleichung (73) am Ende desselben liegt.

Der Stab habe nun eine Länge von 15 Centimetern und einen quadratischen Querschnitt von 1 Quadratcentimeter; seine Dichtigkeit sei 0,7. Alsdann ist für den Fall einer Schwerpunktsaxe nach Gleichung (69) sein Trägheitsmoment

$$T = 197{,}75.$$

Hat nun die Kugel m eine Masse von 6 Gramm, so wird jene Maximalstelle von der Drehungsaxe D die Entfernung

$$x = \sqrt{\frac{197{,}75}{6}} = \sqrt{32{,}958333\ldots}$$

$$5{,}7409\ldots\ldots \text{ Centimeter}$$

haben, also noch um 1,7590 . . . . Centimeter vom Ende des Stabes entfernt liegen. Die Kugel m hat indessen dann von der Axe D die Entfernung 5,7627 (s. Fig. 2). Nach Gleichung (10) ist die der Kugel m durch den Anprall des Stabes ertheilte Geschwindigkeit in diesem Fall, wenn man den Stab sich in jeder Secunde einmal herumdrehen lässt, ihm also die Winkelgeschwindigkeit 2π ertheilt,

$$u = \frac{2\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{197{,}75}{6}}$$

$$18{,}035554\ldots \text{ Centimeter.}^*)$$

Befinden sich dabei Stab und Kugel in einer Höhe von 6 Centimetern über dem Horizont, so wird nach Gleichung (6) die Wurfweite der Kugel m

$$\eta_h = 18{,}035554\ldots\ldots \sqrt{\frac{12}{980{,}896\ldots}},$$

wenn die Intensität der Schwerkraft $g = 980{,}896\ldots$ für Centimeter als Längeneinheit ist, oder

$$\eta_h = 1{,}9947\ldots\ldots \text{ Centimeter.}$$

Die dem Stab nach dem Anprall noch bleibende Winkelgeschwindigkeit ist in diesem Fall

$$w_1 = \pi,$$

d. h. der Stab dreht sich nun in je 2 Secunden einmal herum.

*) Diesem Zahlenbeispiel entsprechen die Figuren 4 und 5.

Wenn man aber unter sonst gleichen Umständen aus der Kugel m ein Pendel in einer Länge von 6 Centimetern verfertigt, so bestimmt sich dessen Ausschlagswinkel nach Gleichung (23) durch die Formel

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{2\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{197{,}75}{6\,.\,980{,}896\,\ldots\cdot 6}}$$

$$0{,}11754785\ldots.$$

oder

$$\vartheta = 13^{0}\,30'4''.$$

§ 23.

Experimentelle Bestätigung der im Vorigen aufgestellten Theorie.

Um eine experimentelle Bestätigung der gefundenen Resultate beifügen zu können, habe ich im physikalischen Cabinet unserer Schule eine Reihe von Versuchen angestellt. Zu diesem Zweck liess ich einen Apparat nach Art der Figur 1 anfertigen, dessen stählerne Drehungsaxe D in gut geöltem Axenlager eine nur geringe Reibung zu überwinden hatte. An der Axe D befestigte ich ausser dem Stabe ein leichtes, sich horizontal drehendes Schaufelrad, gegen welches ich den Luftstrom eines Weinhold'schen Gebläses richtete; es liess sich dadurch einmal jede gewünschte Winkelgeschwindigkeit erzielen, und ausserdem wurde so die etwa noch sich geltend machende Reibung überwunden. Ich habe mich bei Anstellung der Versuche aus Gründen der Zweckmässigkeit lediglich auf die Paragraphen 12, 13 und 14, und zwar speciell auf die Formeln (13) und (22) beschränkt und ebenso den einfachsten Fall des Trägheitsmomentes, den der Formel (69), gewählt. Um der Gleichung (74) zu genügen wählte ich einen Korkstab von der Länge $b = 30$ Centimetern und dem Querschnitt $a^2 = 4$ Quadratcentimetern, dessen Dichtigkeit $\varrho = 0{,}24$ betrug, sodass nach Gleichung (74) das Trägheitsmoment desselben sich als $T = 2169{,}6$ herausstellte, befestigte an einem Knopf, der herabdrückbar von einer Feder getragen wurde, ein Pendel von der Länge $l = 29{,}8$ Centimetern und der Masse $m = 14{,}8$ Gramm, dessen Kugelgewicht einen Durchmesser von $2r = 1{,}4$ Centimetern besass. In diesem Fall war also die Formel (74)

$$2169{,}6 < 3330{,}0$$

erfüllt. Der Berechnung nach musste der grösste Pendelausschlag für

$$x = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{146{,}59\,\ldots} = 12{,}1\,\ldots$$

stattfinden. Ich habe nun den jedesmaligen Ausschlag des Pendels in der Weise beobachtet, dass ich eine senkrechte Wand so aufstellte, dass sie gerade von dem Pendel getroffen wurde, und indem ich dann die geradlinige Entfernung des tiefsten Pendelpunktes in der Ruhelage von dem Punkt, in welchem das Pendel die Wand traf, mass, fand ich die Sehne zu dem zugehörigen Centriwinkel ϑ. Die Hälfte dieser Sehne durch die Pendellänge dividirt ist $\sin\frac{\vartheta}{2}$.

Durch das Weinhold'sche Gebläse bewirkte ich, dass sich der Stab in jeder Minute 78 mal drehte, also für die Secunde als Zeiteinheit eine Winkelgeschwindigkeit $w = 2{,}6\,.\,\pi = 8{,}168\,..$

besass. Ich habe nun den Werth von $sin \frac{\vartheta}{2}$ für verschiedene Werthe von x beobachtet und fand die folgenden tabellarisch zusammengestellten Resultate:

x		2,0	4,0	7,0	8,0	10,0	12,1	13,0	14,3
sin	$\frac{\vartheta}{2}$	3,40 / 29,80	4,80 / 29,80	6,00 / 29,80	6,37 / 29,80	6,65 / 29,80	6,82 / 29,80	6,78 / 29,80	6,56 / 29,80

Aus denselben geht deutlich hervor, dass der Winkel ϑ für $x = 12{,}1$ ein Maximum wird, genau wie die Rechnung ergab.

Bei Anwendung eines Stabes von gleichen Dimensionen aus Pappelholz, dessen Dichtig- $\varrho = 0{,}38$ war, fand dagegen der grösste Ausschlag statt, wenn das Pendel möglichst vom Ende des Stabes getroffen wurde; denn das Trägheitsmoment dieses Stabes ergab sich als $T = 3435{,}2$, es fand also die Formel (72)

$$3435{,}2 > 3330{,}0$$

statt. Dasselbe zeigte sich bei einem bleiernen Stab.

Um endlich die Beobachtungen durch Rechnung zu controliren, war es nöthig den Elasticitätscoefficienten ε_2 der Pendelkugel m zu bestimmen. Derselbe bestimmt sich aus der Gleichung

$$\varepsilon_2 \quad \sqrt{\frac{h_1}{h}},$$

wenn h die Höhe ist, von der man die Kugel auf eine möglichst unelastische Platte niederfallen lässt, und h_1 diejenige, bis auf welche sie zurückgeprallt*), und wurde in diesem Fall 0,6.

Aus den Gleichungen (13) und (64) ergibt sich demnach für $w = 8{,}168..$ bei Anwendung des Korkstabes

$$\omega = \frac{1{,}6 \,.\, 2169{,}6 \,.\, 8{,}168..}{29{,}8 \,.\, (2169{,}6 + 14{,}8 \,.\, x^2)} \,.\, x$$

und aus Gleichung (22)

$$sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{1{,}6 \,.\, 2169{,}6 \,.\, 8{,}168..}{2 \,.\, 29{,}8 \,.\, (2169{,}6 + 14{,}8 \,.\, x^2)} \cdot \sqrt{\frac{29{,}8}{980{,}896}} \,.\, x$$

$$\frac{1{,}6 \,.\, 2169{,}6 \,.\, 8{,}168..}{2 \,.\, \sqrt{980{,}896} \,.\, \sqrt{29{,}8} \,.\, (2169{,}6 + 14{,}8 \,.\, x^2)} \,.\, x \text{ oder}$$

$$(70) \qquad sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{5{,}603}{146{,}6 + x^2} \,.\, x.$$

*) S. „Des Ingenieurs Taschenbuch, herausgegeben von dem Verein Hütte“, Berlin 1876, S. 158.

Die Bewegungsgrösse des Widerstandes einer sich in einem Medium bewegenden Kugel beträgt nach Hutton*) nahezu

$$\frac{\pi \,.\, P \,.\, r^2 \,.\, v^2}{8\,g}$$

bei nicht zu grosser Geschwindigkeit derselben, wobei v die Geschwindigkeit der Kugel, P das specifische Gewicht des Mediums, für atmosphärische Luft 0,001293, ist. Die Bewegungsquantität $m \,.\, \omega \,.\, l$ der Kugel m wird demnach vermindert auf

$$m \,.\, \omega \,.\, l - \frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, \omega^2 \,.\, l^2 \,.\, 0{,}001293}{8\,g},$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit der Kugel wird verringert auf

$$\omega' = \omega - \frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, \omega^2 \,.\, l \,.\, 0{,}001293}{8\,m \,.\, g}$$

und $sin\,\frac{\vartheta}{2}$ auf

$$\begin{aligned} sin\,\frac{\vartheta'}{2} &= \frac{\omega'}{2}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\omega}{2}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} - \frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, \omega^2 \,.\, l \,.\, 0{,}001293}{16\,m \,.\, g}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \\ &= \frac{\omega}{2}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} - \frac{\omega^2}{4}\cdot\frac{l}{g}\cdot\frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, 0{,}001293}{4\,m}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \\ &= sin\,\frac{\vartheta}{2} - \left(sin^2\,\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot\frac{\pi \,.\, r^2 \,.\, 0{,}001293}{4\,m}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}. \\ &= sin\,\frac{\vartheta}{2} - 0{,}00000018\ldots\cdot sin^2\,\frac{\vartheta}{2}, \end{aligned}$$

ein Resultat, welches von $sin\,\frac{\vartheta}{2}$ kaum abweicht, sodass der Luftwiderstand hier vernachlässigt werden kann.

Gleichung (70) liefert demnach ziemlich genau die Werthe von $sin\,\frac{\vartheta}{2}$ für die einzelnen Werthe von x; ist letzteres klein, so ist die Beobachtung sehr erschwert und liefert, da seitliche Componenten hinzutreten, keine genauen Resultate. Um die Uebereinstimmung von Theorie und Experiment beurtheilen zu können, mögen zum Schluss die beobachteten und die nach Gleichung (70) berechneten Werthe von $sin\,\frac{\vartheta}{2}$ für verschiedene Werthe von x angegeben werden:

*) S. „Mathematisches Wörterbuch von L. Hoffmann", VII. Band, Berlin 1867, S. 447.

x	$\sin \frac{\vartheta}{2}$	
	Beobachtet	Berechnet
2,0	0,114	0,074
4,0	0,161	0,138
7,0	0,201	0,200
8,0	0,214	0,212
10,0	0,223	0,227
12,1	0,229	0,231
13,0	0,228	0,230
14,3	0,220	0,228

LEIPZIG,
Druck von A. Edelmann, Universitätsbuchdrucker.